Exemple
Considérons l'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Matrice associée à T : $A\ (3\times 2)$

$$A = \left(T(\vec{e_1}) \ T(\vec{e_2}) \right) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ T(\vec{e_1}) \quad T(\vec{e_2}) \end{array}$$

T est-elle surjective ? Par le th. 11, T est surj si et seulement si A possède un pivot par ligne.
Comme A possède au max. 2 pivots, T n'est pas surj.

T est-elle injective ? T injective $\Leftrightarrow$ $T(\vec{x}) = \vec{0}$ n'a que la sol. triviale (th. 12)
$\Leftrightarrow$ les colonnes de A sont lin. indépendante.
$\Leftrightarrow$ il y a un pivot par colonne.

$\Rightarrow$ T est inj. non surj.

Noyau et image d'une application

Définition 24 (Noyau et image)**.**
Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.
Le *noyau* de T est noté $\mathrm{Ker}(T)$ et c'est l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(T) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

L'*image* de T est définie par

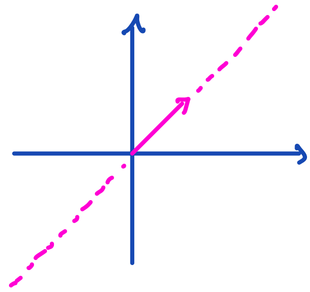
$$\mathrm{Im}(T) = \{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ avec } T(\vec{x}) = \vec{b} \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Exemples

1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(\vec{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$



$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Downarrow$

T non surj.

- $\mathrm{Ker}(T) = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \text{libre} \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$ T non injective.

2) Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

(moodle)

Chapitre 2 : Calcul Matriciel

But
On a vu que les systèmes d'équations linéaires sont étroitement liés à la notion de matrice, à travers la matrice des coefficients ainsi que la matrice augmentée associées. L'étude plus approfondie des matrices fournira des outils pour la résolution des systèmes : $\underbrace{A\vec{x} = \vec{b}}$ ‖ $2x = 5$

1. Lorsque A est carrée et que l'application T_A associée est bijective, on utilisera la matrice associée à l'application inverse de T_A.
2. Lorsque la matrice est rectangulaire ($n \neq m$), on travaillera avec des factorisations matricielles.
3. Pour des matrices de grande taille, on pourra les étudier par blocs.

2.1 Opérations matricielles

On note $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ dont les coefficients sont des nombres réels. Considérons une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. On utilisera les notations suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(\vec{a_1} \ \cdots \ \vec{a_n} \right)$$

n colonnes
m lignes

$$\vec{a_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ j^e colonne

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $A \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$

$a_{12} = 0$ $a_{23} = 3$

$a_{22} = 4$ a_{32} n'existe pas !

On notera encore $0_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 0, dite *matrice nulle*, ainsi que $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matrice carrée qui a des 1 sur la diagonale et dont tous les autres coefficients sont nuls, dite *matrice identité*.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Addition de matrices

Soient $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. On définit la somme $A+B$ de la façon suivante :

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$, alors $A+B=C$ avec

$c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$ $\forall$ $1\le i\le m$, $1\le j\le n$

Multiplication par un scalaire

Pour $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λA par

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{mn} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si $A=(a_{ij})$, alors $\lambda A = D = (d_{ij})$ avec

$d_{ij} = \lambda a_{ij}$ $\forall$ i,j

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\simeq$ $\mathbb{R}^{m\cdot n}$

Théorème 13. *Soient* A,B *et* $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*. Alors on a*

1. $A+B = B+A$ commutativité
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ associativité
3. $A+0_{m\times n} = A$ $0_{m\times n}$ est l'élément neutre pour l'addition
4. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ distributivité mixte
5. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ " "
6. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ associativité mixte
7. $1\cdot A = A$ $1 \in \mathbb{R}$!
8. $0\cdot A = 0_{m\times n}$

Ces propriétés découlent de la définition de l'addition des matrices, de la multiplication par un scalaire et des propriétés de $\mathbb{R}$.

ex: à démontrer (...)

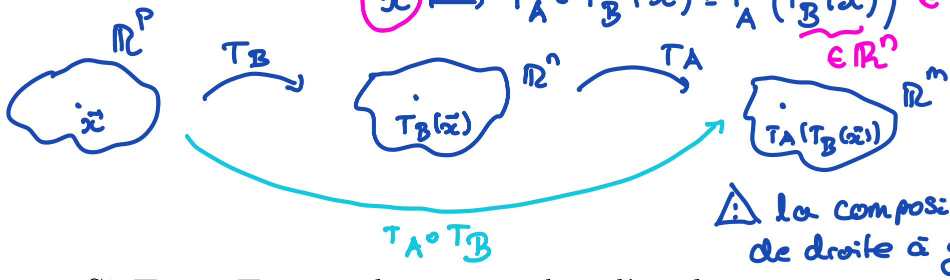
Multiplication de matrices

La définition de la multiplication de deux matrices A et B découle naturellement de la composition des applications linéaires T_A et T_B associées.

Définition

Soient $T_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ des applications. On définit *l'application composée* $T_A \circ T_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ par

$$\vec{x} \longmapsto T_A \circ T_B(\vec{x}) = T_A(\underbrace{T_B(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^n}) \in \mathbb{R}^m$$



⚠ la composition s'effectue de droite à gauche.

Remarque : Si T_A et T_B sont linéaires, alors l'application composée $T_A \circ T_B$ est aussi linéaire.

- $(T_A \circ T_B)(\lambda \vec{x}) \overset{\text{déf. comp.}}{=} T_A(T_B(\lambda \vec{x})) \overset{T_B \text{ lin.}}{=} T_A(\lambda T_B(\vec{x}))$
  $\overset{T_A \text{ lin.}}{=} \lambda T_A(T_B(\vec{x})) \underset{\text{déf. comp.}}{=} \lambda (T_A \circ T_B)(\vec{x})$

- 2ᵉ partie en exercice

Conséquence : La matrice associée à l'application $T_A \circ T_B$ existe.

Exemple

$T_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto B\vec{x}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{y} \mapsto A\vec{y}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

① $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\quad T_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

② $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$, alors $T_A(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_3 \\ -2y_1 + 5y_2 - y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Prenons comme $\vec{y}$ le vecteur $T_B(\vec{x})$.

$$T_A(T_B(\vec{x})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 5(2x_1 - x_2) - (3x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 \\ 5x_1 - 6x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}}_{(*)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(∗) matrice can. associée à $T_A \circ T_B$.

Calculons aussi

$(A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2)$ où $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les colonnes de B

$$A\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

On retrouve les colonnes de la matrice (∗)

$$AB \overset{\text{déf.}}{=} (\underbrace{A \vec{b}_1}_{\substack{(2\times3)\ (3\times1) \\ \Downarrow \\ (2\times1)}} \quad \underbrace{A\vec{b}_2}_{(2\times1)}) \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$$

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Définition 25 (Produit matriciel)**.**
Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ deux matrices. Alors le produit AB est défini par

$$AB = (A\vec{b}_1 \ \dots \ A\vec{b}_p)$$

où $B = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_p)$ avec $\vec{b}_j \in \mathbb{R}^n$ est la j^e colonne de B.

Remarque : $A\vec{b}_j \in \mathbb{R}^m$, donc $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$

Il faut que le nombre de col. de A soit égal au nombre de lignes de B.

Règle ligne-colonne

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ sont des matrices, alors leur produit $C = AB$ est donné par $C = (c_{ij})$ où

$$A\vec{b}_j$$

$$\begin{array}{c} i^e \\ \text{ligne} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

c_{ij} est la i^e composante du vecteur $A\vec{b}_j \in \mathbb{R}^m$

Exemple

$$\underset{\substack{A \\ \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \underset{\substack{B \\ \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})}{\begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 0\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 2\cdot 2 + 0\cdot(-1) = 4$$

$$c_{32} = \sum_{k=1}^{2} a_{3k} b_{k2} = \boxed{a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}} = 2$$

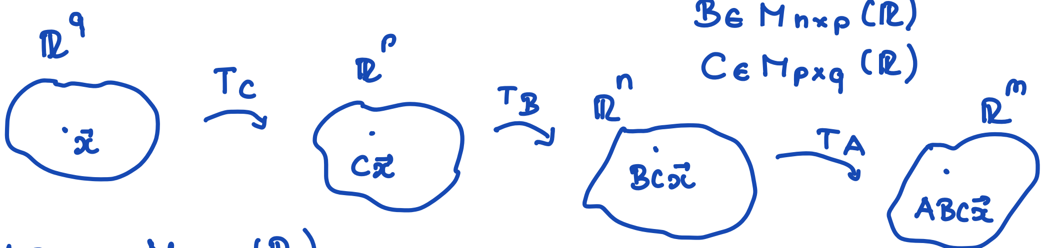
Théorème 14. *Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice et B et C des matrices telles que les expressions ci-dessous soient définies. On a*

1. $A(BC) = (AB)C$ (associative)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributive)
3. $(A + B)C = AC + BC$ (")
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
5. $A = AI_{n\times n} = I_{m\times m}A$ "la" matrice identité est l'él. neutre pour la mult.

Illustration

1. Composée de 3 applications :

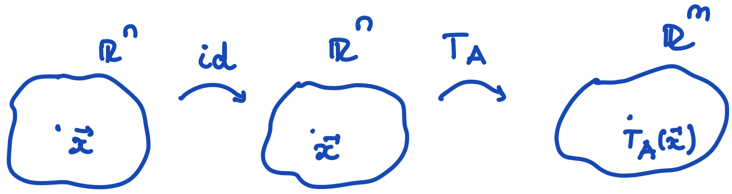
$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
$B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$
$C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$



$ABC \in M_{m\times q}(\mathbb{R})$

$$T_{ABC}(\vec{x}) = \underbrace{A(B(\underbrace{C\vec{x}}_{\in \mathbb{R}^p}))}_{\in \mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^m \quad \text{pour } \vec{x} \in \mathbb{R}^q$$

5. $A = AI_{n\times n}$



$I_{n\times n}$ est la matrice canoniquement associée à l'application identité (id) dans $\mathbb{R}^n$.

$A = I_{m\times m}A$

$I_{m\times m}$ est la matrice can. associée à l'identité dans $\mathbb{R}^m$.

Au niveau de la composition d'applications, on a

$$T_A \circ id = id \circ T_A = T_A$$

Remarques importantes concernant les propriétés du produit matriciel